



Metoda elementów skończonych (MES1)

Ściąga na kol.1

04.2025

Zasady pisania kolokwium 1

Aby sprawnie napisać i nie marnować czasu:

- Wchodzimy na salę tylko z przyborami do pisania w rękę,
- Przy wejściu na salę zostawiamy torby pod ścianą lub na parapecie okna,
- sprawnie zajmujemy miejsce (co drugą ławkę, 5 osób w ławce, z odstępami).

Grupa A *(osoby o nazwiskach na literę od A do M włącznie)*

wchodzi na salę od godz. 12.00

rozdanie zadań 12.05

start kolokwium 12.10

koniec pisania 13.00

sprawne opuszczenie sali

Grupa B *(osoby o nazwiskach na literę od N do Ż włącznie)*

wchodzi na salę od godz. 13.05

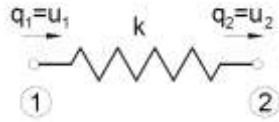
rozdanie zadań 13.10

start kolokwium 13.15

koniec pisania 14.05

sprawne opuszczenie sali

Lokalna macierz sztywności sprężyny:



$$[k]_e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det A} [\alpha_{ik}]^T$$

gdzie a_{ik} są dopełnieniami algebraicznymi elementów a_{ik} macierzy $[A]$.

równoważny wektor obciążenia od obciążenia powierzchniowego:

$$[F^p]_e = t_e \int_0^l |p| [N] ds$$

równoważny wektor obciążenia od obciążenia masowego:

$$[F^X]_e = t_e \int_{A_e} |X| [N] dA_e$$

Funkcje kształtu 8-węzłowego elementu czworokątnego:

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

macierz funkcji kształtu:

$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & \dots & N_8(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & \dots & 0 & N_8(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{2 \times 16}$$

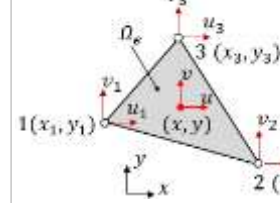
Reguła kwadratur Gaussa: $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(\xi_i) + R_n$

$$R_n = 0 \Rightarrow \frac{d^{2n}f}{d\xi^{2n}} = 0$$

dla elementów 2D: $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (w_i w_j \cdot f(\xi_i, \eta_j))$

elementu CST

funkcje kształtu = znormalizowane pola:

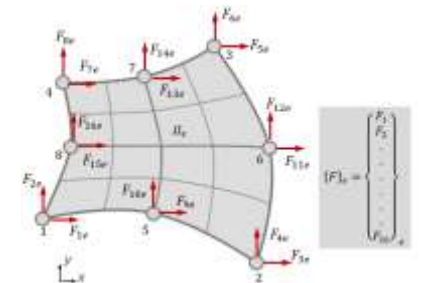
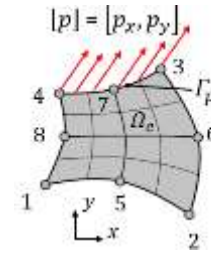


$$N_1(x, y) = \frac{A_1(x, y)}{A_e} = \frac{1}{2A_e} (a_1 + b_1x + c_1y)$$

$$N_2(x, y) = \frac{A_2(x, y)}{A_e} = \frac{1}{2A_e} (a_2 + b_2x + c_2y)$$

$$N_3(x, y) = \frac{A_3(x, y)}{A_e} = \frac{1}{2A_e} (a_3 + b_3x + c_3y)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 & a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 & a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 \\ b_1 &= y_2 - y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 \\ c_1 &= x_3 - x_2 & c_2 &= x_1 - x_3 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$



Całki z funkcji barycentrycznych:

$$J_1 = \int_0^l L_1^q L_2^r dl = \frac{q!r!l}{(q+r+1)!}$$

$$J_2 = \int_{A_e} L_1^q L_2^r L_3^t dA_e = \frac{q!r!t!}{(q+r+t+2)!} 2A_e$$

Stopień wielomianu	Liczba p. Gaussa	ξ_i	w_i
1	1	0	2
3	2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}$	1 1
5	3	$-\sqrt{0.6}$ 0 $+\sqrt{0.6}$	5/9 8/9 5/9